2013年6月14日 統計数理研究所 オープンハウス

# 田口の精密累積法の再評価と修正

椿 広計 データ科学研究系・リスク解析戦略研究センター・サービス科学研究センター 教授

**【田口(1962)「新版実験計画法」，丸善 の精密累積データと精密累積法】**：**すべてのデータは座標変数（ω因子、座標因子）上で、0-1表現することが可能**

田口(1962)の寿命試験データ
20サイクルに記載されているA1の3件、A2の1件は、
右側打ち切りデータと見なす
要因Aは2種類のマグネットワイヤー

| サイクル | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 |
| A2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 |

A1はポリエチレン被覆、A2はシリコン被覆

⇓ **精密累積データへ変換して分割法分散分析**： X=14の場合

**サイクル：ω因子**（21水準として仮に扱っている）

Box, Bisgard and Fung(1988)の精密累積法批判

| サイクル | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**【 Lindsay(1997)のParametric Multiplicative Intensity Model】**：

⇓ **Poisson Model適用のための修正精密累積データ**

修正精密累積データ行列（一部表示）

| 行番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15・・・ | 341 | 342 | 343 | 344 | 345 | 346 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| event | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1・・・ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| cycle | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14・・・ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0・・・ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**修正精密累積法**というべき一般化線形モデリングの萌芽

一連の0, 1データが平均$\lambda_k$のポアソン分布に独立に従うと仮定

第$m$単位時刻( $m \leqq K$ )に事象が生起し、精密累積データが1

⇒ 尤度関数：$\exp(-\sum_{k=1,\ldots,m-1} \lambda_i)\ (\prod_{k=m,\ldots,K}\lambda_k)\ \exp(-\sum_{k=m,\ldots,\underline{K}} \lambda_i)$

分布のハザード関数：$\lambda(t)$，累積ハザード関数$\Lambda(t)$とすれば，

上記尤度関数は$\lambda(t_m)\exp(-\Lambda(t_m))$の離散近似． 右側打ち切りデータは，打ち切り単位時刻を0とすれば良い⇒ $\exp(-\Lambda(t_m))$の離散近似

$n$個の修正精密累積データ $C_{it}$,と各時点に依存する共変量$\mathbf{x}_i$からなるデータ$(C_{it}, \mathbf{x}_{it})$, $i$=1,…,$n$, $t$=1,…,$\underline{t}_i$ に対する近似統計モデルは、$C_{it}$が、期待値E[$C_{it}$| $\mathbf{x}_{it}$]＝$\mu_{it}$のポアソン分布に従うとして，Lindayは， $\log \mu_{it} = \lambda(t) + \mathbf{x}_{it}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ と表現し，$\lambda(t)$に$t$ やlog $t$に関する多項式モデルを当てはめた**一般化線形モデル（PMIM）**を提唱（$t$の一次式モデルならばグンベル分布モデル，log $t$の一次式ならばワイブル分布モデルに対応）．

**【 修正精密累積法：田口(1962)の原思想を再評価し，PMIMを拡張】**：

**PMIMの3つの拡張**：: ① $\lambda(t)$を$K$-1水準の要因として分析、あるいはスプライン回帰を用い一般化加法モデルで分析
②時間と要因効果との交互作用を検討，③ 分割法(Multilevel Model)としての解析（現時点で未検討）

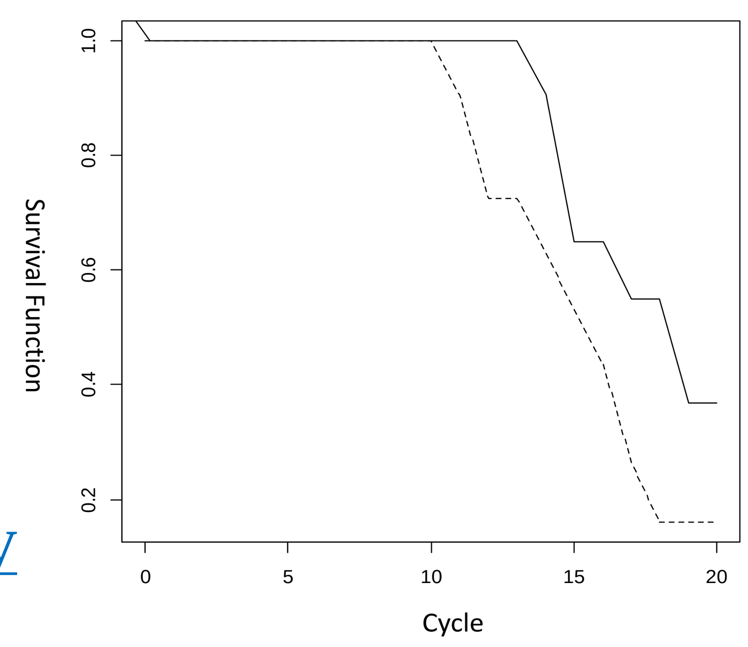
**修正精密累積法1**：田口(1962)データへの単純分散分析モデル適用： $\log \mu_{it} = \mu + t_i + a_j + (t \times a)_{ij}$ $i$=1,…,21, $j$=1,2

**修正精密累積法2**：PMIMの$\lambda(t)$ をノンパラメトリック項とした一般化加法モデル(GAM)の適用

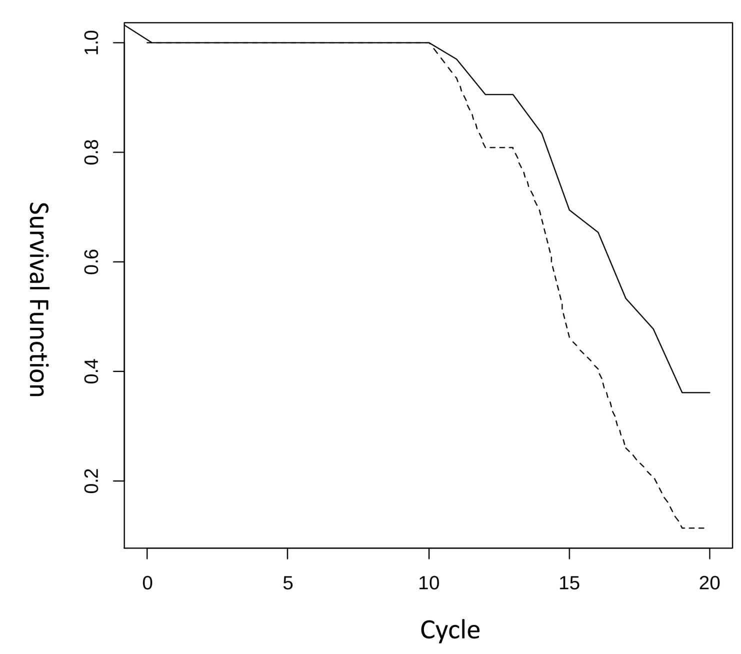
**【田口(1962)の再解析】**

**修正精密累積法1のANODEV(Analysis of Deviance)**

| | Df | Deviance | Resid. Df | Resid. Dev | AIC |
|---|---|---|---|---|---|
| NULL | | | 345 | 98.363 | 132.363 |
| factor(cycle) | 20 | 43.926 | 325 | 54.437 | 128.437 |
| A | 1 | 2.171 | 324 | 52.265 | *128.265* |
| factor(cycle):factor(A) | 20 | 8.345 | 304 | 43.920 | 159.920 |




**修正精密累積法１：含交互作用の推定生存関数**



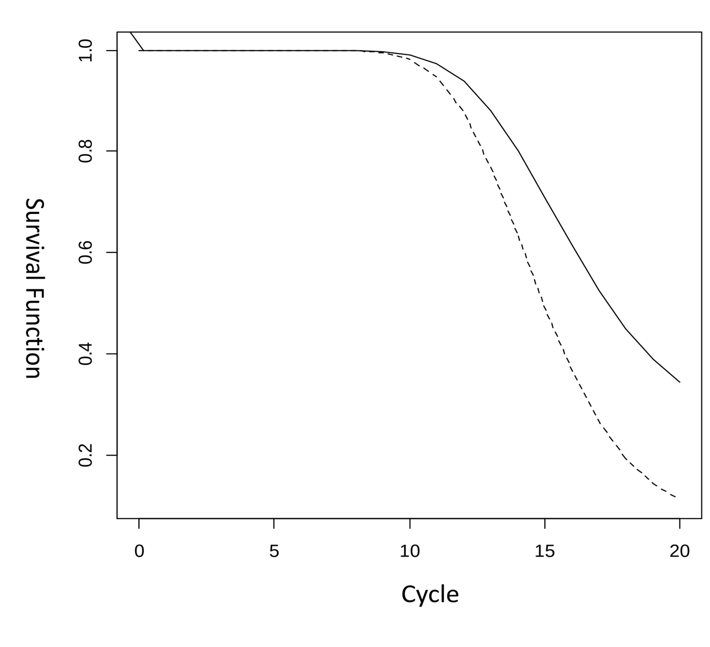

**修正精密累積法１：主効果の推定生存関数**

**Lindsay (1997)のPMIM: log(Cycle+0.5)の多項式モデル当てはめのANODEV**

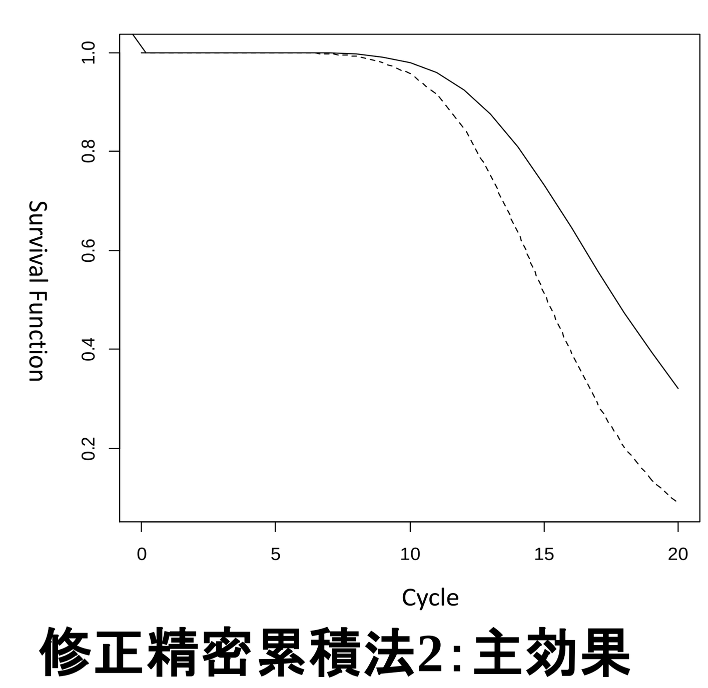
| | Df | Deviance | Resid. Df | Resid. Dev | AIC |
|---|---|---|---|---|---|
| NULL | | | 345 | 98.363 | 132.363 |
| log(cycle + 0.5) | 1 | 31.788 | 344 | 66.575 | 102.575 |
| I(log(cycle + 0.5)^2) | 1 | 3.569 | 343 | 63.006 | 101.006 |
| A | 1 | 2.024 | 342 | 60.982 | *100.982* |
| A * log(cycle + 0.5) | 1 | 0.861 | 341 | 60.121 | 102.121 |
| A * log(cycle + 0.5)^2 | 1 | 0.910 | 340 | 59.211 | 103.211 |

**最小AIC PMIMの最尤推定量**

| | Estimate | Std. Error | z value | Pr(>\|z\|) |
|---|---|---|---|---|
| (Intercept) | -93.8375 | 58.8546 | -1.594 | 0.111 |
| log(cycle + 0.5) | 63.7459 | 43.3832 | 1.469 | 0.142 |
| log(cycle + 0.5)^2 | -11.0450 | 7.9782 | -1.384 | 0.166 |
| A | 0.7221 | 0.5100 | 1.416 | 0.157 |




**Min AIC PMIMの推定生存関数**




**修正精密累積法2：主効果の推定生存関数**

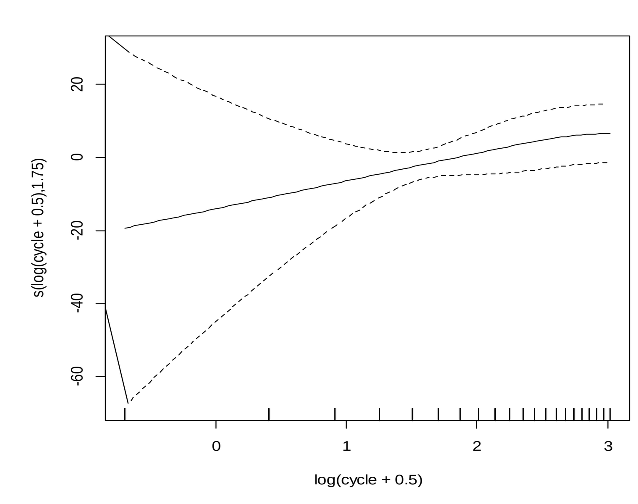
**修正精密累積法２の当てはめ結果：** $\log \mu_{it} = \mu + \lambda(\log(t+0.5)) + a_j$

| | Estimate | Std. Error | z value | Pr(>\|z\|) |
|---|---|---|---|---|
| (Intercept) | -8.2616 | 4.0093 | -2.061 | 0.0393 |
| A | 0.7595 | 0.5113 | 1.486 | 0.1374 |

| | edf | Ref.df | Chi.sq | p-value |
|---|---|---|---|---|
| s(log(cycle + 0.5)) | 1.748 | 2.188 | 3.341 | 0.212 |

AIC=101.395

藤田（1998）は地震生起間隔分布に対して修正精密累積法２を適用し，様々な知見を得ている．




**修正精密累積法2ハザード関数（ノンパラメトリック項）の推定 横軸のノッチがサイクルに相当**

【参考文献】
Box, G. E. P., Bisgaard, S. and Fung, C., (1988) An explanation and critique of Taguchi's contributions to quality engineering, *Quality and Reliability Engineering International*, 4, 123-131
Lindsay, J. K. (1997) Parametric multiplicative intensities models fitted to bus motor failure data, *Applied Statistics*, 46(2), 245-252.
田口玄一(1962) 32.2 精密累積法, 新版実験計画法下, 丸善.
藤田正彦(1998)寿命分布における故障率関数の推定ー地震生起間隔への適用，慶應義塾大学理工学部数理科学科椿研卒業論文